Πρόταση

$U \subseteq \mathbb{R}^m$, $\bar f(U) \subset V$, $\bar g : V \to \mathbb{R}^k$, διαφ. στο $\bar f(\bar x)$

$\Rightarrow$ $\bar g \circ \bar f : U \to \mathbb{R}^k$ διαφ. στο $\bar x$

με $D(\bar g \circ \bar f)(\bar x) = D\bar g(\bar f(\bar x)) \cdot D\bar f(\bar x)$ (κανόνας της αλυσίδας)

Παράδειγμα:

"$m = 1$", "$n = n$", "$k = 1$". Έστω ότι:

α) $\bar\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $\bar\gamma$ διαφορίσιμη

β) $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό με $\bar\gamma(I) \subset U$

γ) $f : U \to \mathbb{R}$

Τότε (κανόνας της αλυσίδας):

Η $f \circ \bar\gamma$: $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $\bar\gamma$ διαφορίσιμη με παράγωγο

$$(f \circ \bar\gamma)'(t) = Df(\bar\gamma(t)) \cdot \underbrace{D\bar\gamma(t)}_{\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} = \underbrace{\nabla f(\bar\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}^{1 \times n}}$$

$$= \nabla f(\bar\gamma(t)) \cdot \bar\gamma'(t) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \bar\gamma'(t) \; (= \dot{\bar\gamma}(t))$$

Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής → καμπύλη (το ελάχιστο που ζητάμε είναι να είναι συνεχείς)

→ $\bar\gamma \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ άπειρες φορές διαφ. (Γεωμ. Διαφ.)

Ορισμός:

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα (ανοιχτό). Τότε μια διανυσματική συνάρτηση με τιμές διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία είναι συνεχής ονομάζεται: παραμετρική καμπύλη, $\bar\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\bar\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, και η εικόνα της

$\bar\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$

[άλλα ονόματα:

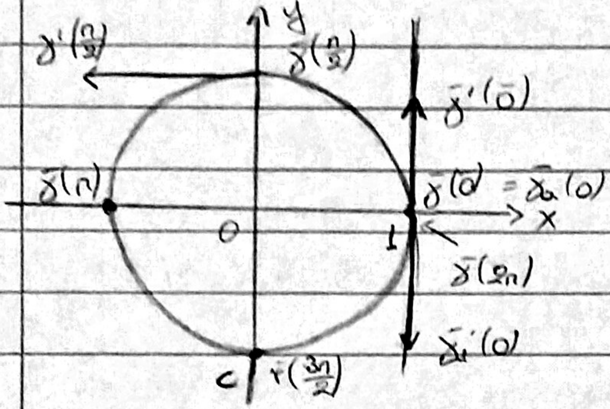
α) για παραμετρική καμπύλη: καμπύλη, δρόμος (path), τροχιά (στην μηχανική)

β) για καμπύλη (στο $\mathbb{R}^n$) ίχνος, τόξο (arc)]

Παράδειγμα:

$I = \mathbb{R}$, $\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ με $\bar{\gamma}(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = C$

όπου $C \subset \mathbb{R}^2$, ο κύκλος κέντρου $K(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.



Παρατηρούμε, όμως ότι και π.χ οι καμπύλες $\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$\bar{\gamma}_2(t) = (\cos(at), \sin(at))$, $t \in [a, \frac{2\pi}{a}]$ αν $a > 0$, $t \in [0, \frac{2\pi}{a}]$, αν $a < 0$
έχουν την ίδια εικόνα, δηλ. τις καμπύλες $\bar{\gamma}_1([0, 2\pi]) = C$,
$\bar{\gamma}_a([0, \frac{2\pi}{|a|}]) = C$, $a \neq 0$

Ορισμός:

Έστω $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Τότε η παράγωγος της στο σημείο $t_0 \in I$ (δηλ. του πεδίου ορισμού της $\bar{\gamma}$) $D\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1'(t) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_n'(t) \end{pmatrix} =: \bar{\gamma}'(t)$
αν $\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ στο t.
(ή της $\bar{\gamma}(I) = C$ στο $\bar{\gamma}(t) \in C$) ή διάνυσμα ταχύτητας της $\bar{\gamma}$ στο t.

Παρατήρηση (ΠΡΟΣΟΧΗ!)

Το εφαπτόμενο διάνυσμα «της $\bar{\gamma}(I) = C$ στο $\bar{\gamma}(t)$» εξαρτάται από την $\bar{\gamma}$ (δηλ. μπορεί για διαφορετικές παραμετρικοποιήσεις της C, να έχουμε διαφορετικά εφαπτόμενα διανύσματα στο $\bar{x} \in C$)

Παράδειγμα:

Οι $\bar{\gamma}(t) = (\cos(at), \sin(at))$, $t \in [a, \frac{2\pi}{|a|}]$ έχουν εφαπτόμενα διανύσματα
$\bar{\gamma}_a'(t) = a(\sin(at), \cos(at)) \Rightarrow \bar{\gamma}_a'(0) = a(0,1)$

Πχ

για $a=1$ έχουμε εφαπτ. διαν. $\bar{\gamma}_1'(0)=(0,1)$ ενώ για $a=2$ έχουμε εφαπτ. διαν. $\bar{\gamma}_2'(0)=2(0,1)$ και για $a=-1$ έχουμε εφαπτ. διαν $\bar{\gamma}_{-1}'(0)=-(0,1)$

Ορισμός:

Έστω $\bar{\gamma}: I\to\mathbb{R}^n$, $I\subset\mathbb{R}$ διάστημα

α) Η $\bar{\gamma}$ ονομάζεται συνεχής στο $t_0\in I \iff t_n\to t_0 \Rightarrow \underbrace{\bar{\gamma}(t_n)\to\bar{\gamma}(t_0)}_{\iff \|\bar{\gamma}(t_n)-\bar{\gamma}(t_0)\|\to 0}$

β) Η $\bar{\gamma}$ ονομάζεται διαφορίσιμη στο $t_0\in I :\iff \exists \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\bar{\gamma}(t)-\bar{\gamma}(t_0)}{t-t_0} = \underbrace{\bar{\gamma}'(t_0)}_{\text{παράγωγος της } \bar{\gamma} \text{ στο } t_0}\in\mathbb{R}^n$

γ) Η $\bar{\gamma}$ ονομάζεται συνεχώς διαφορίσιμη στο $t_0 \iff$
$\exists\delta>0\ \forall t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\subset I$, $\exists\bar{\gamma}'(t)\in\mathbb{R}^n$
(δηλ. $\exists \bar{\gamma}':(t_0-\delta),(t_0+\delta)\to\mathbb{R}^2$) και η $\bar{\gamma}'$ $(t_0-\delta,t_0+\delta)\to\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο t_0.

δ) Η $\bar{\gamma}$ ονομάζεται κανονική (στο I) $:\iff$ Η $\bar{\gamma}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη (στο I) και $\|\bar{\gamma}'(t)\|\neq 0\ \forall t\in I$ η οποία λέγεται βαθμωτή ταχύτητα της $\bar{\gamma}$ στο t.

Παρατήρηση: Αν $\bar{\gamma}:I\to\mathbb{R}^n$ είναι κανονική, τότε το $\dfrac{\bar{\gamma}'(t)}{\|\bar{\gamma}'(t)\|}$ ονομάζεται μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ στο t, το οποίο εξαρτάται μόνο από τον προσανατολισμό της $\bar{\gamma}$ στο t δηλ την φορά του εφαπτόμενου διανύσματος της $\bar{\gamma}$ στο t (όπου η εφαπτόμενη ευθεία (ο φορέας του εφαπτ. διαν.) είναι δεδομένος (και ίδιος) για κάθε παραμετροποίηση της $\bar{\gamma}(I)=C$) (από κανονικές καμπύλες)

Παράδειγμα:

Η $\bar{\gamma}_a(t)=(\cos(at), \sin(at))$, $a\neq 0$, έχουν τον ίδιο φορέα (δηλ την ευθεία που παράγεται απ' τα εφαπτ. διανύσματα)

$\bar{\gamma}_a'(t)=a(-\sin(at), \cos(at))$ με ταχύτητα $\|\bar{\gamma}_a'(t)\|=|a|\neq 0$ για $a\neq 0$

No. Date

(⇒ η $\bar{\gamma}_a$ είναι κανονική $\forall a\neq 0$) αλλά ενδεχομένως διαφορετική φορά
πχ $\bar{\gamma}_1'(0)=(0,1)$ $\quad \bar{\gamma}_{-1}' = -(0,1) \in \{d(0,1) : d\in\mathbb{R}\}$ = εφ. ευθεία της $\bar{\gamma}$ στο 0 δηλ. η $\bar{\gamma}_1$ στο 0 έχει τον προσανατολισμό «(0,1)» και η $\bar{\gamma}_{-1}$ στο $t=0$ τον προσανατολισμό «$-(0,1)$»

Παρατήρηση: Η εφ. ευθεία (δηλ. ο φορέας του εφαπτ. διαν.) μιας κανονικής καμπύλης είναι ανεξάρτητος της παραμετροποίησης

Ορισμός:
Έστω $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ κανονική, $\phi:[A,B]$ και $[a,b]$, "1-1" και επί, C^1
Τότε η $\bar{J} := \bar{\gamma}\circ\phi : [A,B]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται αναπαραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}$, μέσω του παρ. μετασχ. ϕ = (διαφορομορφισμός)

Παράδειγμα:
$\bar{\gamma}_a(t) = (\cos(at), \sin(at)) = (\bar{\gamma}_1\circ\phi)(t) = (\cos(\phi(t)), \sin(\phi(t)))$, $t\in\left[0, \frac{2\pi}{|a|}\right]$
με $\phi:\left[0,\frac{2\pi}{|a|}\right]\to[0,2\pi]$ είναι μια αναπαραμ. της $\bar{\gamma}_1$ μέσω του $\phi(t)=at$. Αν η ϕ είναι γν. αύξουσα/φθίνουσα θέλμε ότι διατηρεί/αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Παρατήρηση: (συνάρτηση 1 μεταβλητής)

$$\underbrace{(\bar{\gamma}_1\circ\phi)'}_{=\bar{\gamma}_a}(t) = D(\bar{\gamma}_1\circ\phi)(t) = \underbrace{D\bar{\gamma}_1(\phi(t))\, D\phi(t)}_{=\bar{\gamma}_1'(\phi(t))\,\phi'(t)\in\mathbb{R}}$$

⇒ οι $\bar{\gamma}_a=\bar{\gamma}_1\circ\phi$ και $\bar{\gamma}_1$ έχουν την ίδια εφαπτ. ευθεία (φορέα του ίδιου εφαπτ. διαν.) και την ίδια/αντίθετη φορά αν η ϕ διατ./αντιστ. προσανατολισμό.